Measuring Returns to Scale in Nineteenth-Century French Industry
– Technical Appendix –

Ulrich Doraszelski*
Hoover Institution, Stanford University

March 2004

Formal Derivations

Gross-output vs value-added production function. With the Cobb-Douglas form used by Sicsic (1994), increasing returns to scale in the value-added production function are equivalent to increasing returns to scale in the gross-output production function. The choice between value-added and gross-output production function is nevertheless not innocuous because returns to scale estimated from the value-added production function overstate (understate) the degree of returns to scale in the case of increasing (decreasing) returns. To see this, let $i = 1, \ldots, N$ index observations and let y_i denote output, l_i labor, m_i materials, and k_i capital. Consider the gross-output production function

$$y_i = e^{\beta_0} l_i^{\beta_l} m_i^{\beta_m} k_i^{\beta_k} e^{\epsilon_i}$$

and define the value-added production function to be the solution to

$$\max_{m_i} p y_i - w_m m_i,$$

*Stanford, CA 94305-6010, U.S.A., doraszelski@hoover.stanford.edu.

where p is the price of output and w_m is the price of intermediate goods. Then the value-added production function is given by

$$\begin{aligned} v_i &= e^{\frac{\beta_0}{1-\beta_m}} \left(\frac{p\beta_m}{w_m}\right)^{\frac{\beta_m}{1-\beta_m}} l_i^{\frac{\beta_l}{1-\beta_m}} k_i^{\frac{\beta_k}{1-\beta_m}} e^{\frac{1}{1-\beta_m}\epsilon_i} \\ &= e^{\gamma_0} l_i^{\gamma_l} k_i^{\gamma_k} e^{\eta_i}. \end{aligned}$$

Returns to scale are computed from the value-added production function as $\gamma_l + \gamma_k$ and as $\beta_l + \beta_m + \beta_k$ from the gross-output production function. But

$$\gamma_l + \gamma_k \gtreqless \beta_l + \beta_m + \beta_k \Leftrightarrow \beta_l + \beta_m + \beta_k \gtreqless 1,$$

which shows that returns to scale estimated from the value-added production function overstate (understate) the degree of returns to scale in the case of increasing (decreasing) returns.

Sicsic's (1994) heteroskedasitcity correction. Sicsic (1994) uses the average establishment as the unit of observation and tries to correct for the resulting heteroskedasticity by dividing by the square root of the number of establishments. Since his model is log-linear, however, it is not consistent with using the number of establishments as weight. Indeed, when taken literally, Sicsic's (1994) heteroskedasticity correction induces a correlation between error term and regressors. To see this, let $i = 1, \ldots, N$ index observations and $j = 1, \ldots, n_i$ index establishments within the ith observation. Let v_{ij} denote the value added of the jth establishment in the ith observation, and let l_{ij} and k_{ij} be defined analogously for labor and capital inputs, respectively. If the individual firm's value-added production function is of the Cobb-Douglas form,

$$v_{ij} = e^{\gamma_0} l_{ij}^{\gamma_l} k_{ij}^{\gamma_k} e^{\eta_{ij}},$$

then taking logs and averaging over establishments yields

$$\ln v_{i\bullet} = \gamma_0 + \gamma_l \ln l_{i\bullet} + \gamma_k \ln k_{i\bullet} + \underbrace{\eta_{i\bullet} - \left(\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} \ln v_{ij} - \ln v_{i\bullet}\right)}_{\text{composite error term}}$$

$$\underbrace{+\gamma_l\left(\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\ln l_{ij}-\ln l_{i\bullet}\right)+\gamma_k\left(\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\ln k_{ij}-\ln k_{i\bullet}\right)}_{\text{composite error term (cont'd)}},$$

where $v_{i\bullet} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} v_{ij}$ etc. Instead of being proportional to $\frac{1}{n_i}$, the variance of the composite error term is a complicated function of n_i that also depends on the regressors. Moreover, the regressors are correlated with the composite error term which causes the coefficient estimates to be biased.

Aggregate vs average establishment. Returns to scale estimated from average establishments in general overstate (understate) the degree of returns to scale in the case of increasing (decreasing) returns to scale. To see this, let $j = 1, \ldots, n$ index establishments within a collective observation. For the sake of the argument let y_j denote the gross-output and x_j the generic input of the jth establishment and assume that its production function is given by $y_j = x_j^\alpha$. Note that

$$y_\bullet = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha \gtreqless \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^\alpha = x_\bullet^\alpha \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 1,$$

which implies $\ln y_\bullet \gtreqless \alpha \ln x_\bullet \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 1$. The degree of returns to scale is estimated to be $\hat{\alpha} = \frac{\ln y_\bullet}{\ln x_\bullet}$. Hence, $\hat{\alpha} \gtreqless \alpha \Leftrightarrow \alpha \gtreqless 1$ provided that $x_\bullet > 1$. On the other hand, if the aggregate establishment is used as the unit of observation, then the degree of returns to scale is estimated to be $\hat{\alpha} = \frac{\ln \sum_{j=1}^{n} y_j}{\ln \sum_{j=1}^{n} x_j}$, which tends to understate (overstate) the degree of returns to scale in the case of increasing (decreasing) returns to scale.

Monte Carlo Experiment

I consider the production function

$$y_i = e^{\beta_0} l_i^{\beta_l} m_i^{\beta_m} k_i^{\beta_k} e^{\epsilon_i}.$$

Following the recent literature on production function estimation, I assume that the firm knows the productivity shock when it chooses its inputs (Olley & Pakes 1996, Levinsohn & Petrin 2003). As I argue in the main text, this implies that l_i, m_i, and k_i are positively correlated with ϵ_i. One suspects that this causes overestimation of β_l, β_m, and β_k, and thus of the degree of returns to scale. However, this is not generally true, since the biases of the OLS estimators for β_l, β_m, and β_k also depend on the covariances of the regressors. To investigate wether endogeneity indeed leads to overestimation of the degree of returns to scale I therefore conduct a Monte Carlo experiment.

Since the biases of the OLS estimators for β_l, β_m, and β_k depend on the covariance between the regressors, $(\ln l_i, \ln m_i, \ln k_i)$, the Monte Carlo samples are generated such that the covariance of the simulated inputs equals the covariance of the observed inputs in my data sets, and similarly for the means of the regressors. Also the variance of the productivity shock and the parameters of the production function are estimated from the data sets using OLS. Finally, the Monte Carlo sample sizes are equal to the actual sample sizes in my data sets.

It remains to choose the correlations between error term and regressors. Assuming that each regressor can have a correlation of 0, $\frac{1}{2}$, or 1 with the error term yields 27 correlation patterns. However, the covariance between the regressors restricts the set of possible correlations between error term and regressors. Hence, if a correlation pattern is not feasible, I choose the closest one (in terms of Euclidian distance) that is. For a given correlation pattern and industry, the simulation experiment proceeds as follows. Imposing the correlations between the error term and the regressors, I generate $S = 500$ samples of size N from a multivariate normal distribution. Then I estimate the production function for each Monte Carlo sample and calculate the bias of estimates of the degree of returns to scale.

The results are presented in Tables 1-4. Tables 1 and 2 contain results for the French industrial census of 1839-47 using either the aggregate (Table 1) or the average (Table 2) establishment as the unit of observation. Tables 3 and 4 correspond to Tables 1 and 2 and report results for the French industrial census of 1861-65. In summary, for both French industrial censuses, one can be reasonably confident that even a small amount of positive correlation between the productivity shock and the inputs leads to overestimation of the degree of returns to scale. Also the bias appears to be quite substantial even for moderate correlations.

correlation between ϵ and			codbrag															
$\ln(l)$	$\ln(m)$	$\ln(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0	0	0.5	0.06	0.14	0.05	0.08	0.08	0.07	0.10	0.12	0.11	0.07	0.02	0.11	0.04	0.01	0.11	0.17
0	0	1	0.12	0.23	0.09	0.13	0.14	0.13	0.15	0.19	0.21	0.13	0.04	0.19	0.07	0.05	0.19	0.30
0	0.5	0	0.01	-0.02	0.05	-0.01	-0.03	0.01	-0.11	-0.02	-0.04	0.06	0.08	-0.01	0.02	-0.01	-0.11	0.00
0	0.5	0.5	0.08	0.12	0.10	0.07	0.05	0.08	-0.01	0.09	0.08	0.13	0.10	0.10	0.06	0.01	0.01	0.16
0	0.5	1	0.14	0.24	0.15	0.14	0.14	0.15	0.12	0.19	0.21	0.18	0.10	0.20	0.09	0.06	0.15	0.31
0	1	0	0.05	0.02	0.10	0.02	0.00	0.04	-0.06	0.00	0.00	0.10	0.12	0.02	0.04	0.02	-0.06	0.01
0	1	0.5	0.10	0.12	0.15	0.08	0.07	0.10	0.01	0.09	0.10	0.17	0.14	0.11	0.08	0.05	0.03	0.16
0	1	1	0.15	0.24	0.18	0.15	0.14	0.16	0.11	0.19	0.22	0.22	0.15	0.20	0.11	0.09	0.14	0.28
0.5	0	0	0.08	0.13	0.06	0.08	0.10	0.10	0.19	0.11	0.19	0.06	0.01	0.07	0.05	0.12	0.18	0.09
0.5	0	0.5	0.15	0.27	0.11	0.16	0.18	0.17	0.28	0.23	0.30	0.13	0.03	0.18	0.09	0.13	0.28	0.26
0.5	0	1	0.18	0.33	0.15	0.19	0.21	0.21	0.27	0.29	0.37	0.20	0.06	0.24	0.11	0.13	0.29	0.38
0.5	0.5	0	0.09	0.11	0.11	0.07	0.07	0.11	0.08	0.08	0.15	0.12	0.09	0.06	0.07	0.11	0.06	0.09
0.5	0.5	0.5	0.16	0.25	0.16	0.15	0.15	0.18	0.17	0.20	0.26	0.19	0.11	0.17	0.11	0.12	0.17	0.26
0.5	0.5	1	0.22	0.38	0.21	0.22	0.23	0.25	0.26	0.31	0.37	0.26	0.13	0.27	0.14	0.14	0.28	0.42
0.5	1	0	0.11	0.12	0.15	0.08	0.06	0.13	0.05	0.09	0.13	0.17	0.14	0.06	0.09	0.10	0.03	0.10
0.5	1	0.5	0.17	0.23	0.21	0.14	0.13	0.19	0.10	0.18	0.23	0.24	0.18	0.16	0.12	0.12	0.10	0.25
0.5	1	1	0.22	0.35	0.25	0.21	0.21	0.24	0.20	0.29	0.35	0.28	0.19	0.25	0.16	0.15	0.22	0.37
1	0	0	0.14	0.22	0.11	0.12	0.14	0.18	0.23	0.19	0.28	0.12	0.04	0.10	0.09	0.15	0.20	0.17
1	0	0.5	0.19	0.33	0.16	0.18	0.21	0.23	0.31	0.29	0.40	0.19	0.06	0.19	0.12	0.18	0.30	0.32
1	0	1	0.22	0.38	0.19	0.22	0.25	0.25	0.33	0.33	0.45	0.24	0.09	0.25	0.14	0.19	0.34	0.39
1	0.5	0	0.16	0.23	0.16	0.14	0.15	0.20	0.21	0.19	0.29	0.17	0.10	0.11	0.11	0.17	0.18	0.18
1	0.5	0.5	0.23	0.37	0.22	0.22	0.23	0.28	0.33	0.31	0.43	0.25	0.12	0.22	0.15	0.22	0.31	0.34
1	0.5	1	0.25	0.43	0.24	0.25	0.28	0.29	0.35	0.37	0.50	0.30	0.15	0.28	0.18	0.22	0.36	0.43
1	1	0	0.17	0.23	0.19	0.14	0.14	0.20	0.17	0.19	0.27	0.21	0.15	0.12	0.12	0.17	0.14	0.19
1	1	0.5	0.23	0.34	0.25	0.21	0.21	0.27	0.25	0.28	0.39	0.29	0.19	0.22	0.16	0.21	0.24	0.31
1	1	1	0.26	0.41	0.27	0.25	0.26	0.29	0.31	0.35	0.46	0.32	0.20	0.28	0.18	0.22	0.31	0.40

Table 1: Bias in estimates of the degree of returns to scale for the various industries in the French industrial census 1839-47. Unit of observation is the aggregate establishment.

correlation between ϵ and			codbrag															
ln(l)	ln(m)	ln(k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0	0	0.5	0.07	0.13	0.05	0.09	0.09	0.10	0.10	0.13	0.18	0.07	0.09	0.16	0.05	0.03	0.13	0.24
0	0	1	0.12	0.21	0.09	0.14	0.16	0.17	0.14	0.19	0.35	0.13	0.14	0.26	0.10	0.06	0.22	0.43
0	0.5	0	-0.01	-0.03	0.05	-0.04	-0.04	-0.03	-0.13	-0.04	-0.06	0.04	-0.05	-0.10	0.02	0.00	-0.14	-0.06
0	0.5	0.5	0.06	0.10	0.10	0.05	0.05	0.07	-0.04	0.09	0.13	0.10	0.04	0.05	0.07	0.03	0.00	0.17
0	0.5	1	0.13	0.22	0.15	0.13	0.15	0.17	0.10	0.19	0.31	0.16	0.14	0.22	0.12	0.08	0.17	0.41
0	1	0	0.02	0.00	0.10	-0.01	-0.01	-0.01	-0.07	-0.01	-0.05	0.07	-0.01	-0.06	0.05	0.03	-0.09	-0.08
0	1	0.5	0.08	0.10	0.15	0.05	0.07	0.07	-0.01	0.08	0.13	0.14	0.06	0.06	0.10	0.07	0.02	0.12
0	1	1	0.14	0.21	0.19	0.13	0.16	0.15	0.09	0.18	0.31	0.19	0.14	0.19	0.14	0.11	0.15	0.32
0.5	0	0	0.08	0.14	0.06	0.09	0.12	0.13	0.20	0.11	0.29	0.07	0.12	0.12	0.07	0.11	0.20	0.18
0.5	0	0.5	0.15	0.27	0.11	0.17	0.21	0.23	0.27	0.23	0.47	0.14	0.21	0.25	0.13	0.13	0.32	0.42
0.5	0	1	0.18	0.32	0.15	0.20	0.25	0.26	0.25	0.29	0.60	0.19	0.23	0.31	0.16	0.14	0.33	0.53
0.5	0.5	0	0.08	0.11	0.11	0.04	0.08	0.10	0.06	0.07	0.23	0.11	0.08	0.01	0.09	0.10	0.06	0.11
0.5	0.5	0.5	0.15	0.24	0.16	0.13	0.17	0.20	0.16	0.20	0.42	0.17	0.16	0.17	0.15	0.13	0.19	0.36
0.5	0.5	1	0.21	0.36	0.21	0.22	0.26	0.29	0.24	0.31	0.59	0.24	0.25	0.32	0.20	0.16	0.32	0.54
0.5	1	0	0.08	0.11	0.15	0.04	0.06	0.09	0.03	0.08	0.19	0.14	0.07	-0.02	0.11	0.11	0.01	0.08
0.5	1	0.5	0.14	0.21	0.21	0.10	0.14	0.17	0.07	0.16	0.36	0.21	0.13	0.10	0.17	0.14	0.10	0.29
0.5	1	1	0.20	0.33	0.25	0.18	0.23	0.25	0.17	0.28	0.52	0.25	0.22	0.24	0.21	0.17	0.24	0.44
1	0	0	0.13	0.24	0.11	0.12	0.17	0.22	0.22	0.19	0.49	0.12	0.17	0.12	0.14	0.15	0.22	0.34
1	0	0.5	0.19	0.33	0.16	0.19	0.25	0.28	0.29	0.29	0.65	0.19	0.24	0.24	0.19	0.18	0.33	0.49
1	0	1	0.21	0.38	0.19	0.22	0.29	0.30	0.31	0.34	0.70	0.23	0.27	0.31	0.21	0.19	0.38	0.55
1	0.5	0	0.15	0.23	0.16	0.12	0.17	0.22	0.19	0.18	0.50	0.16	0.17	0.10	0.15	0.17	0.19	0.29
1	0.5	0.5	0.22	0.37	0.22	0.21	0.27	0.31	0.30	0.30	0.70	0.24	0.27	0.24	0.22	0.22	0.34	0.49
1	0.5	1	0.25	0.42	0.25	0.24	0.31	0.33	0.33	0.37	0.73	0.29	0.30	0.32	0.24	0.23	0.39	0.55
1	1	0	0.15	0.23	0.20	0.11	0.16	0.20	0.15	0.18	0.43	0.19	0.16	0.07	0.16	0.17	0.14	0.23
1	1	0.5	0.21	0.33	0.25	0.18	0.24	0.27	0.22	0.27	0.59	0.26	0.23	0.18	0.21	0.22	0.25	0.40
1	1	1	0.24	0.40	0.27	0.23	0.29	0.31	0.28	0.34	0.66	0.30	0.29	0.28	0.24	0.23	0.34	0.49

Table 2: Bias in estimates of the degree of returns to scale for the various industries in the French industrial census 1839-47. Unit of observation is the average establishment.

correlation between ϵ and			codbrag															
$\ln(l)$	$\ln(m)$	$\ln(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0	0	0.5	0.06	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05	0.05	0.01	-0.01	-0.01	0.20	0.08	0.06	0.01	0.07	0.06
0	0	1	0.08	0.11	0.06	0.09	0.07	0.09	0.08	0.05	0.03	0.01	0.24	0.12	0.07	0.05	0.11	0.09
0	0.5	0	-0.01	0.09	0.01	0.04	0.00	0.00	-0.02	0.01	0.09	0.03	0.05	-0.02	-0.04	0.07	-0.02	0.02
0	0.5	0.5	0.05	0.15	0.05	0.08	0.05	0.05	0.03	0.02	0.08	0.02	0.23	0.06	0.01	0.08	0.05	0.07
0	0.5	1	0.09	0.19	0.08	0.12	0.09	0.11	0.09	0.06	0.10	0.05	0.28	0.13	0.06	0.10	0.12	0.12
0	1	0	0.02	0.17	0.03	0.07	0.02	0.03	0.02	0.04	0.13	0.07	0.08	0.02	-0.02	0.11	0.02	0.05
0	1	0.5	0.06	0.22	0.06	0.12	0.06	0.07	0.06	0.06	0.15	0.08	0.20	0.08	0.01	0.13	0.07	0.09
0	1	1	0.10	0.26	0.09	0.15	0.10	0.12	0.10	0.09	0.16	0.09	0.28	0.14	0.06	0.15	0.13	0.13
0.5	0	0	0.04	0.06	0.03	0.04	0.04	0.07	0.07	0.09	0.06	0.10	-0.08	0.07	0.06	0.04	0.09	0.04
0.5	0	0.5	0.09	0.11	0.07	0.09	0.08	0.12	0.12	0.10	0.06	0.09	0.11	0.15	0.11	0.05	0.16	0.10
0.5	0	1	0.12	0.16	0.09	0.13	0.11	0.15	0.13	0.12	0.08	0.08	0.24	0.18	0.12	0.09	0.18	0.13
0.5	0.5	0	0.03	0.15	0.04	0.08	0.04	0.07	0.06	0.10	0.15	0.13	-0.03	0.06	0.01	0.11	0.08	0.06
0.5	0.5	0.5	0.09	0.21	0.08	0.13	0.09	0.12	0.11	0.12	0.14	0.12	0.16	0.14	0.07	0.12	0.14	0.11
0.5	0.5	1	0.14	0.26	0.11	0.17	0.13	0.17	0.15	0.13	0.15	0.11	0.32	0.21	0.12	0.14	0.20	0.17
0.5	1	0	0.05	0.23	0.06	0.11	0.05	0.08	0.07	0.10	0.19	0.15	0.07	0.08	0.02	0.15	0.08	0.09
0.5	1	0.5	0.08	0.31	0.09	0.16	0.09	0.13	0.10	0.13	0.22	0.15	0.20	0.13	0.04	0.18	0.13	0.14
0.5	1	1	0.13	0.33	0.12	0.20	0.13	0.17	0.15	0.15	0.22	0.15	0.31	0.20	0.09	0.19	0.20	0.18
1	0	0	0.06	0.11	0.05	0.08	0.06	0.11	0.10	0.13	0.10	0.14	-0.01	0.11	0.08	0.08	0.14	0.08
1	0	0.5	0.11	0.17	0.09	0.12	0.10	0.16	0.15	0.16	0.12	0.15	0.10	0.17	0.12	0.10	0.20	0.12
1	0	1	0.14	0.22	0.11	0.16	0.13	0.19	0.17	0.17	0.14	0.14	0.21	0.21	0.14	0.13	0.23	0.16
1	0.5	0	0.07	0.20	0.07	0.12	0.07	0.12	0.11	0.15	0.17	0.18	0.02	0.12	0.07	0.13	0.15	0.10
1	0.5	0.5	0.12	0.26	0.11	0.17	0.12	0.18	0.17	0.20	0.20	0.20	0.11	0.20	0.12	0.16	0.22	0.16
1	0.5	1	0.16	0.31	0.14	0.21	0.15	0.22	0.20	0.21	0.20	0.19	0.27	0.25	0.15	0.18	0.27	0.20
1	1	0	0.08	0.26	0.09	0.15	0.09	0.13	0.12	0.16	0.22	0.19	0.09	0.13	0.06	0.17	0.15	0.12
1	1	0.5	0.12	0.33	0.12	0.20	0.12	0.18	0.16	0.20	0.26	0.22	0.18	0.19	0.09	0.21	0.21	0.17
1	1	1	0.17	0.36	0.15	0.24	0.16	0.22	0.20	0.22	0.27	0.21	0.30	0.25	0.13	0.23	0.27	0.21

Table 3: Bias in estimates of the degree of returns to scale for the various industries in the French industrial census 1861-65. Unit of observation is the aggregate establishment.

correlation between ϵ and			codbrag															
$\ln(l)$	$\ln(m)$	$\ln(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
0	0	0.5	0.03	0.13	0.04	0.05	0.06	0.06	0.04	-0.01	-0.01	-0.03	0.21	0.07	0.04	-0.02	0.07	0.06
0	0	1	0.07	0.20	0.07	0.09	0.09	0.10	0.07	0.03	0.03	-0.01	0.26	0.12	0.08	0.02	0.13	0.11
0	0.5	0	0.01	0.11	0.01	0.03	0.01	0.03	-0.03	0.04	0.04	0.05	0.04	0.00	0.01	0.06	-0.05	0.04
0	0.5	0.5	0.04	0.24	0.05	0.08	0.07	0.08	0.02	0.03	0.03	0.02	0.23	0.07	0.05	0.05	0.02	0.09
0	0.5	1	0.09	0.30	0.09	0.12	0.12	0.14	0.07	0.06	0.08	0.03	0.30	0.14	0.09	0.06	0.11	0.15
0	1	0	0.04	0.21	0.04	0.07	0.04	0.06	0.01	0.06	0.09	0.09	0.07	0.04	0.04	0.10	-0.02	0.08
0	1	0.5	0.07	0.30	0.07	0.11	0.09	0.11	0.04	0.08	0.11	0.08	0.21	0.10	0.07	0.11	0.04	0.14
0	1	1	0.11	0.36	0.10	0.15	0.13	0.16	0.08	0.10	0.15	0.08	0.30	0.16	0.11	0.12	0.12	0.18
0.5	0	0	0.09	0.03	0.05	0.06	0.04	0.09	0.08	0.11	0.20	0.08	-0.06	0.09	0.05	0.07	0.14	0.08
0.5	0	0.5	0.12	0.15	0.09	0.10	0.09	0.15	0.11	0.10	0.19	0.05	0.14	0.16	0.10	0.06	0.22	0.13
0.5	0	1	0.13	0.27	0.11	0.14	0.13	0.18	0.12	0.11	0.18	0.04	0.27	0.19	0.12	0.07	0.23	0.18
0.5	0.5	0	0.09	0.14	0.06	0.09	0.05	0.12	0.05	0.13	0.24	0.13	-0.02	0.09	0.07	0.14	0.09	0.12
0.5	0.5	0.5	0.13	0.27	0.10	0.14	0.11	0.17	0.09	0.13	0.23	0.10	0.18	0.16	0.11	0.12	0.16	0.17
0.5	0.5	1	0.16	0.38	0.13	0.18	0.16	0.23	0.12	0.13	0.22	0.08	0.35	0.23	0.15	0.11	0.23	0.23
0.5	1	0	0.10	0.25	0.07	0.12	0.07	0.14	0.06	0.14	0.25	0.15	0.07	0.11	0.08	0.16	0.08	0.15
0.5	1	0.5	0.14	0.39	0.11	0.17	0.12	0.20	0.08	0.16	0.27	0.14	0.22	0.17	0.12	0.17	0.12	0.22
0.5	1	1	0.17	0.43	0.14	0.21	0.17	0.24	0.12	0.17	0.28	0.13	0.34	0.23	0.16	0.17	0.20	0.25
1	0	0	0.13	0.10	0.08	0.10	0.06	0.16	0.10	0.15	0.30	0.10	0.01	0.14	0.09	0.11	0.20	0.14
1	0	0.5	0.16	0.20	0.11	0.14	0.11	0.22	0.14	0.17	0.32	0.10	0.13	0.20	0.13	0.12	0.27	0.20
1	0	1	0.18	0.30	0.14	0.18	0.15	0.24	0.16	0.18	0.31	0.09	0.25	0.23	0.16	0.12	0.29	0.23
1	0.5	0	0.15	0.20	0.10	0.13	0.08	0.19	0.10	0.18	0.35	0.15	0.04	0.16	0.11	0.16	0.19	0.18
1	0.5	0.5	0.20	0.31	0.14	0.19	0.14	0.26	0.15	0.22	0.41	0.16	0.15	0.24	0.16	0.18	0.28	0.25
1	0.5	1	0.22	0.42	0.17	0.22	0.18	0.29	0.18	0.22	0.38	0.14	0.31	0.28	0.19	0.17	0.33	0.28
1	1	0	0.16	0.29	0.11	0.16	0.11	0.20	0.11	0.19	0.36	0.17	0.10	0.17	0.12	0.19	0.18	0.20
1	1	0.5	0.20	0.39	0.15	0.21	0.15	0.26	0.14	0.23	0.41	0.19	0.21	0.24	0.16	0.22	0.24	0.26
1	1	1	0.23	0.45	0.18	0.25	0.20	0.29	0.18	0.24	0.41	0.17	0.33	0.29	0.20	0.23	0.30	0.29

Table 4: Bias in estimates of the degree of returns to scale for the various industries in the French industrial census 1861-65. Unit of observation is the average establishment.

References

Levinsohn, J. & Petrin, A. (2003). Estimating production functions using inputs to control for unobservables, *Review of Economic Studies* **70**(2): 317–341.

Olley, S. & Pakes, A. (1996). The dynamics of productivity in the telecommunications industry, *Econometrica* **64**(6): 1263–1297.

Sicsic, P. (1994). Establishment size and economies of scale in 19th-century France, *Explorations in Economic History* **31**: 453–478.